1.
Eén, twee, drie, ... veel

Gehele getallen in het wild

‘Wiskunde? Dat vond ik op school altijd zó moeilijk!’ Die reactie krijg ik regelmatig als ik iemand vertel wat mijn werk is. Mijn beroep is namelijk het bestuderen van de mathematische fysica, de overlap tussen de wis- en de natuurkunde. Ik ben blij dat je het hebt aangedurfd om aan een boek over mijn vakgebied te beginnen, want inderdaad: wiskunde wordt vaak een moeilijk vak gevonden. Misschien is dat niet onterecht, want de wiskunde bestrijkt talloze deelonderwerpen die wetenschappers vaak met geavanceerde technieken bestuderen. Toch begint ook de wiskunde bij iets heel eenvoudigs: tellen. Tellen kunnen we allemaal, al vanaf jonge leeftijd. Dat iedereen leert tellen komt niet doordat we allemaal wiskundigen willen worden, maar doordat de eenvoudigste wiskunde is gebaseerd op wat we in de wereld om ons heen zien. Ook ons begrip van de natuur begint namelijk bij tellen.

Veel van de eenvoudigste vragen die je als natuurkundige kunt stellen, hebben een getal als antwoord. Hoeveel watergolven rollen er in een uur het strand op? Hoe vaak beweegt de slinger van een uurwerk heen en weer voordat de zon weer opkomt? Hoeveel keer kan je in een elektrische auto tussen je huis en je werk heen en weer rijden als je met een volle accu begint?

Sommige van die vragen kun je beantwoorden met een *geheel* getal: 1, 2, 3, 4, ... enzovoort. Dat is precies wat we bedoelen als we het over ‘tellen’ hebben: we willen een geheel getal als antwoord, niet ‘drie en een beetje’. Dit boek begint met de vraag waar zulke gehele getallen in de natuur voorkomen. En daarmee bedoel ik: waar in de natuur *exact* gehele getallen voorkomen. Wat dat betreft zijn de voorbeelden hierboven niet zo goed. Misschien is er al een volgende watergolf bezig het strand op te rollen als je stopwatch precies een uur aangeeft, en moeten we die golf dus half meetellen. En wie weet kun je met dezelfde accu nog eens dertig procent van de route naar je werk afleggen.

Niet alle getallen in de natuurkunde zijn dus gehele getallen, hoewel we dat soms wel graag zouden willen. Hoeveel dagen zitten er bijvoorbeeld in een jaar? In eerste instantie zou je het antwoord 365 willen geven, maar we weten allemaal dat dit antwoord grofweg eens in de vier jaar niet klopt. Een schrikkeljaar heeft immers 366 dagen. 'Driehonderdvijfenzestig en een kwart' is dus al een beter antwoord, maar zelfs dat gemiddelde antwoord is niet exact. Eens in de zo veel tijd moeten we namelijk een schrikkeljaar overslaan om het allemaal precies te laten passen. Het probleem is dat een jaar nu eenmaal de tijd is waarin de aarde één keer rond de zon draait, en een dag de tijd waarin de aarde ten opzichte van de zon één keer rond haar as draait. Beide tijdseenheden zijn voor ons om allerlei redenen van belang, maar niets of niemand garandeert dat de ene hoeveelheid tijd precies een geheel aantal malen in de andere past – en dat is dan ook niet het geval.

Andere voorbeelden van vragen waarop het antwoord géén geheel getal is, zijn snel gevonden. Als ik hekken van 1 meter lengte wil plaatsen rond een cirkelvormig weiland met een straal van 30 meter, hoeveel hekken heb ik dan nodig? Wie handig is in rekenen met het getal π – over dat getal later in dit boek veel meer – kan uitrekenen dat het antwoord ergens tussen de 188 en 189 ligt. Géén geheel getal dus.

Als we er wat dieper over nadenken, lijken gehele getallen in de natuurkunde dus helemaal niet zo vaak voor te komen. De meeste dingen kunnen we juist níét tellen. De wiskunde van de gehele getallen lijkt op zijn best een abstractie, een benadering van wat we in de natuur zien.

In de rest van dit hoofdstuk zullen we echter ontdekken dat er ook allerlei interessante vragen in de natuur zijn waarop het antwoord precies een geheel getal is. Een voorbeeld: uit hoeveel elementen is alles om ons heen opgebouwd? De Oude Grieken dachten dat het antwoord wel eens 4 kon zijn – aarde, water, lucht en vuur. Tegenwoordig weten we dat dit antwoord niet klopt, maar ook de hedendaagse elementen

kun je tellen. Waterstof is element nummer één, helium element nummer twee, enzovoort.

Wellicht denk je nu dat dit nog niet wil zeggen dat er ook een láátste element is, en dat we dus daadwerkelijk álle elementen kunnen tellen. Een wiskundige zou zeggen dat de verzameling van alle elementen weliswaar *aftelbaar* is, maar niet noodzakelijk *eindig*. En inderdaad: hoewel er in de natuur om ons heen maar een eindig aantal elementen voorkomt – grofweg 90, of als we alles meetellen wat we in een laboratorium kunnen maken 117 – is er geen theoretische grens, en zouden er nóg zwaardere elementen gemaakt kunnen worden, al is het maar voor héél eventjes.

Strikt genomen hebben we dus nog steeds geen eindig telprobleem in de natuur gevonden. Maar veel gerelateerde vragen hebben wel degelijk een geheel getal als antwoord. Hoeveel protonen en neutronen zitten er in een uraniumkern? Hoeveel elektronen zoeven er rond in een koolstofatoom? Hoeveel soorten quarks – fundamentele deeltjes waar we verderop nog op terugkomen – bestaan er eigenlijk?

Sommige van zulke 'telvragen' zijn bijna filosofisch van aard. Hoeveel dimensies bestaan er? We noemen onze wereld driedimensionaal, omdat we er in het dagelijks leven drie zien: links-rechts, boven-onder en voor-achter. Met die drie dimensies of, om het wiskundiger te formuleren, met de drie *coördinaten*: x, y en z kunnen we elk punt in de ruimte om ons heen beschrijven. Toch ligt het antwoord 3 niet helemaal voor de hand. Einstein was er een groot voorstander van om ook de tijd als dimensie te beschouwen – zoals we later zullen zien met goede redenen. En als we de moderne snaartheorie mogen geloven, die uitgebreid ter sprake zal komen, bestaan er nog ten minste zes andere dimensies die zó klein zijn dat we ze in ons dagelijks leven helemaal niet zien!

De wijze les: wanneer het antwoord op een vraag een simpel, geheel getal is, wil dat beslist niet zeggen dat de vraag daarmee niet interessant is. Wat denk je bijvoorbeeld van de vraag 'hoeveel heelallen zijn er?' Het voor de hand liggende antwoord lijkt 1, maar daar zijn lang niet alle geleerden het over eens. Anderen komen op basis van hun modellen tot geschatte aantallen van vele honderden cijfers.

Voordat we op twee interessante vraagstukken wat dieper ingaan nog een laatste ietwat flauw voorbeeld. Hoeveel meter legt een lichtflits in een seconde af? Het antwoord is 299.792.458 meter. En een beetje? Nee! Ook dit antwoord is exact een geheel getal. Licht legt per seconde nog geen nanometer meer of minder af. De reden is dat een meter sinds 1983 is gedefinieerd als de afstand die licht aflegt in 1/299.792.458e van een seconde. Voordien werd de meter gedefinieerd als de lengte van een platina staaf die onder heel nauwkeurig gecontroleerde omstandigheden in Parijs werd bewaard, maar die definitie werd naarmate wetenschap en techniek vorderden steeds onhandiger. Vandaar dat we tegenwoordig de definitie aan de hand van de lichtsnelheid gebruiken. En vandaar ook dat het antwoord op onze vraag wél een geheel getal is – zij het niet het interessante slag van gehele getallen waar ik het in dit hoofdstuk over wil hebben.

In dit hoofdstuk bespreek ik twee voorbeelden die wél van die interessante soort zijn – voorbeelden waarbij het feit dat een antwoord een geheel getal is echt iets interessants zegt over de onderliggende fysica. Ik doe dat met een kleine zorg in het achterhoofd, want je zult merken dat we daarbij direct flink diep de natuur- en wiskunde in duiken. Misschien vind je dat heerlijk en is dat precies de reden dat je dit boek hebt gekocht, maar misschien behoor je wel tot de groep lezers die wis- en natuurkunde op school weliswaar interessant, maar óók heel moeilijk vonden. In dat laatste geval wil ik je niet direct afschrikken, maar juist de nadruk op het 'interessant' proberen te leggen. Mocht je me nog eens bij een lezing of gewoon in de trein tegenkomen, laat me dan vooral weten of ik er goed aan heb gedaan om dit boek met zo'n pittig hoofdstuk te beginnen...

Aan het eind van dit hoofdstuk bekijken we een meetkundig vraagstuk uit de hierboven al genoemde snaartheorie. Dat voorbeeld kun je zien als een voorproefje van de rest van dit boek, want er zullen allerlei onderwerpen de revue passeren die later nog eens in een wat rustiger tempo langskomen. Laten we echter beginnen met een voorbeeld uit een theorie die centraal staat in een groot deel van de moderne natuurkunde. Voor die theorie is het feit dat er gehele getallen in voorkomen zó cruciaal dat het zelfs in de naam verweven zit: quantummechanica.

Quantisatie

Van Dale omschrijft het woord 'quantum' (in de schrijfwijze 'kwantum', maar veel natuurkundigen bieden moedig weerstand aan die manier van schrijven) als 'hoeveelheid'. Als we het hebben over het fysische begrip quantum, dekt die omschrijving de lading niet helemaal. Een quantum is in de natuurkunde een *fundamentele* en *ondeelbare* hoeveelheid. Licht van een bepaalde kleur kent bijvoorbeeld zo'n quantum. Laten we als voorbeeld het rode licht nemen dat waterstofgas uitzendt als je het opwarmt. Je kunt zulk licht produceren in een hoeveelheid die bijna willekeurig is, maar net niet helemaal. Als je heel goed zou meten, zou je ontdekken dat de hoeveelheid energie in dat rode licht altijd een geheel veelvoud is van 0,00000000000000000030259 joule. De joule – in het dagelijks leven vooral bekend als warmtemaat – is de maat waarmee natuurkundigen alle vormen van energie meten. Eén joule is grofweg de energie die nodig is om een appel een meter op te tillen.

Het getal 0,00000000000000000030259 zelf is niet exact. Als je maar nauwkeurig genoeg meet, vind je nog veel meer decimalen achter de komma. Wat wel exact is, is het *veelvoud* van dat getal. Rood licht kan drie keer deze hoeveelheid energie hebben, of zeven keer, of tien miljard keer – maar nooit bijvoorbeeld drieënhalve keer! 0,00000000000000000030259 joule is het *quantum* van energie voor rood licht uit waterstofgas. De kleur rood is daar natuurlijk niet speciaal in. Ook van groen, geel of blauw licht bestaat zo'n quantum; wel steeds met een iets andere getalswaarde, maar steevast ondeelbaar. Alleen gehele veelvouden komen voor.

Dat de natuur zo'n *quantisatie* vertoont, was niet altijd duidelijk. Dat is niet zo vreemd, want het meten van een hoeveelheid energie die pas op het negentiende cijfer achter de komma begint valt niet mee. Op de veel grotere schaal van alledag merk je van die quantisatie helemaal niets. Vergelijk het met kijken naar een televisiebeeld dat uit miljoenen pixels bestaat. De 'quantisatie' van het beeld zie je als je het van heel dichtbij bekijkt, maar vanuit je luie stoel aan de andere kant van de kamer zie je gladde vormen en objecten die schijnbaar op elke plaats op het scherm kunnen voorkomen. Pas rond de overgang van de negentiende naar de twintigste eeuw waren de natuurkunde en de techniek zo ver gevorderd dat de quantisatie van energie zichtbaar begon te worden. Dat gebeurde op maar liefst drie fronten, en vrijwel gelijktijdig.

De eerste die de quantisatie van energie opmerkte, was de Duitse theoretisch natuurkundige Max Planck. Planck onderzocht de straling die van voorwerpen afkomt als we ze opwarmen. Sommige voorwerpen zijn zwart, wat in natuurkundige termen betekent dat ze geen enkele kleur licht weerkaatsen. ‘Kleur’ staat voor een natuurkundige overigens altijd gelijk aan ‘golflengte’. Rood licht wordt uitgezonden in golven met een lengte van zo’n 700 nanometer, blauw licht in golven met een lengte van rond de 450 nanometer. Maar ook voor ons oog onzichtbare golflengtes zoals de langere golflengtes van infrarood licht en radiostraling, of de kortere golflengtes van ultraviolet licht en gammastraling beschouwt de natuurkundige als ‘kleur’.

Als een voorwerp perfect zwart is – we noemen het dan een ‘zwart lichaam’ – wil dat nog niet zeggen dat het helemaal geen licht uitstraalt. Zodra we zo’n zwart lichaam opwarmen, gaat het uit zichzelf licht uitzenden. Dat gebeurt op alle golflengtes, maar het sterkst bij één specifieke golflengte die afhangt van de temperatuur. Warmen we een zwart lichaam op tot zo’n 4000 graden, dan wordt vooral veel rood licht uitgezonden. Warmen we het verder op tot 6000 graden, dan is de meest uitgezonden kleur geel, maar ook van de andere kleuren wordt dan het nodige licht uitgezonden – zo veel, dat het geheel op ons overkomt als wit. Dat laatste is niet toevallig: 6000 graden is namelijk de temperatuur van het oppervlak van de zon. Het licht waaraan onze ogen gewend zijn omdat wij het dagelijks zien, is dus precies het licht van een voorwerp van die temperatuur, en daarom ervaren we dat als egaal wit.

Planck probeerde te begrijpen en te voorspellen hoeveel licht van de verschillende kleuren een zwart lichaam bij een bepaalde temperatuur zou uitstralen. Voor licht van lange golflengtes lukte dat heel aardig – iets wat eerder al door de Britse natuurkundigen Lord Rayleigh en James Jeans was aangetoond. Zij namen simpelweg aan dat het uitgezonden licht van elke golflengte grofweg evenveel energie zou bevatten. Die veronderstelling ging voor licht van korte golflengtes echter helemaal de mist in: de resultaten van Rayleigh en Jeans voorspelden zelfs dat er dan oneindig veel licht met korte golflengtes zou worden

uitgezonden! Een onzinnig resultaat, en dat was het probleem dat Planck probeerde op te lossen.

Uiteindelijk was het de wiskunde die Planck te hulp schoot – de eenvoudigste wiskunde zelfs die we kennen: die van de gehele getallen. Als hij aannam dat licht, ook van korte golflengtes, alleen in *gehele veelvouden* van een vast energiepakketje kon voorkomen, verdween het probleem van Rayleigh en Jeans als sneeuw voor de zon. Voor korte golflengtes is het energiequantum namelijk groter dan voor lange golflengtes, en dus bevat een zwart lichaam zelfs bij een temperatuur van 6000 graden op een gegeven moment niet meer genoeg energie om ook maar één pakketje van zulk licht te maken. Dáárom, zo redeneerde Planck, was er juist vrijwel geen licht met korte golflengtes. Toen hij aan het rekenen sloeg, bleken daarmee precies de waargenomen hoeveelheden licht verklaard te kunnen worden. Planck was zo de eerste die – in feite met simpelweg ‘tellen’ – een quantumfenomeen wist te beschrijven. Voor hem was de ‘teltruc’ echter meer wiskunde dan natuurkunde: hij had geen idee waaróm energie alleen in veelvouden van een quantum kon voorkomen.

Degene die de wiskunde echt als natuurkunde ging zien, was Albert Einstein. Hij bestudeerde in 1905 een ander fenomeen: het foto-elektrisch effect. Dat effect was achttien jaar eerder al door Heinrich Hertz waargenomen. Hertz liet licht op elektrisch geladen metalen platen vallen, en zag dat er op een bepaald moment vonken tussen die platen oversprongen. Einstein wilde begrijpen waarom er soms ook géén vonken oversprongen, en in het bijzonder waarom dat niet gebeurde als je licht met lange golflengtes gebruikte.

Kort voor Einsteins werk, in 1897, had J.J. Thomson het elektron ontdekt: het elektrisch geladen elementaire deeltje. Thomsons elektronen springen tussen de platen over in de vonken die Hertz zag. Einstein besefte dat er, om zo’n elektron uit een metalen plaat los te maken, een bepaalde minimale hoeveelheid energie nodig was. Elk elektron ‘zit even goed vast’. Het energiepakketje van het gebruikte licht moest dus groot genoeg zijn om een elektron los te kunnen stoten.

Einstein begon de quanta van Planck daarmee echt te zien als *lichtdeeltjes* (tegenwoordig zouden we zeggen: ***fotonen***) die elk één quantum aan energie met zich meedragen. Alleen als een enkel foton voldoende energie heeft, kan het elektronen uit de geladen plaat losmaken. Heeft het gebruikte licht een te lange golflengte, dan heeft elk foton te weinig energie, en springt er dus nooit een vonk over, hoeveel licht je ook op de plaat laat vallen.

Planck besefte dát er geteld moest worden en Einstein besefte wát je moest tellen: fotonen. Een derde telprobleem in de fysica van quanta werd bestudeerd door de Deense natuurkundige Niels Bohr. Hij deed rond 1913 ook al onderzoek naar licht – maar niet licht van zomaar een willekeurige golflengte. Bohr keek naar licht van heel specifieke kleuren dat werd uitgezonden door atomen.

Dat bepaalde atomen alleen bepaalde kleuren licht uitstralen, was al bekend. Het is precies waarom natriumlampen geel zijn, de meeste lasers rood en sommige gasnevels die sterrenkundigen aan de hemel zien blauw. Een atoom zendt echter niet maar één kleur licht uit, maar een heel spectrum aan verschillende kleuren. De golflengtes van veel van die 'kleuren' zijn echter zo lang of kort dat we ze met ons blote oog niet kunnen zien. Bohr bestudeerde per atoom álle kleuren die het kon uitzenden.

De Zweedse natuurkundige Johannes Rydberg had eerder al een bijzonder patroon in die kleuren ontdekt. Bij het eenvoudigste atoom, waterstof, was dat patroon het duidelijkst. Als Rydberg aannam dat het ene elektron dat in het waterstofatoom voorkomt heel bepaalde hoeveelheden energie kon hebben – gequantiseerde energieën dus! – kon hij exact reproduceren welke kleuren de lichtquanta uit zo'n atoom konden hebben.

Vreemd aan dat patroon waren de waarden die de energieën van het elektron konden aannemen. Die waren weer gequantiseerd, maar niet helemaal zoals bij Planck het geval was. De maximale hoeveelheid energie had een bepaalde waarde, de volgende energie had een waarde die vier keer zo klein was, die daarna een waarde die negen keer zo klein was, en de daaropvolgende een waarde die zestien keer zo klein was.

De reeks getallen die zo naar voren kwam was: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... Als je naar dat rijtje kijkt, zul je al snel zien dat dit precies de *kwadraten* van gehele getallen zijn. $1 \times 1 = 1$; $2 \times 2 = 4$; $3 \times 3 = 9$; enzovoort. Het ging hier dus niet alleen om de wiskunde van het tellen, maar ergens in die wiskunde bleek ook het begrip 'kwadraat' van belang! Bohr wilde begrijpen waar deze verrassende kwadraten vandaan kwamen.

Alles golft!

De grote vraag in de begintijd van de quantummechanica was: waarom al die gehele getallen? Soms kwam je álle gehele getallen tegen, soms alleen de kwadraten – maar waarom zijn het altijd *gehele* getallen, en is het nooit '3 en een beetje'?

Het antwoord werd niet in één klap duidelijk, maar begon door onderzoek van natuurkundigen zoals Louis de Broglie, Erwin Schrödinger en Max Born in de loop der jaren langzaam te dagen. Na de eerste ontdekkingen van Max Planck ging er ruim een kwarteeuw overheen voordat de natuurkundewereld het gevoel had dat de quantummechanica enigszins onder controle was. Zo'n lange periode in een paar alinea's samenvatten is natuurlijk onbegonnen werk. Gelukkig hoeven we ook niet de héle quantummechanica te begrijpen: we willen alleen weten waar die bijzondere gehele getallen vandaan komen. Laat ik dus in vogelvlucht de voor ons belangrijke hoogtepunten langsgaan – in de hoop dat het je niet gaat duizelen.

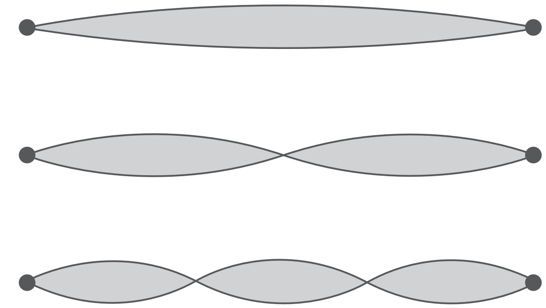
Een van de eerste doorbraken kwam van de hand van Louis de Broglie. Hij ontdekte dat er een sterke gelijkenis bestaat tussen het gedrag van fotonen en dat van elektronen. De Broglie zag in dat je een elektron, net als een foton, als een pakketje energie met een bepaalde *golflengte* kon zien. Wat zo'n golflengte voor een elektron betekende was nog onduidelijk – want wat 'golft' er in een elektron? Beide verschijnselen, lichtquanta en elektronen, leken desondanks aan precies dezelfde quantumwetten te voldoen.

Hoe de details van die quantumwetten eruitzagen, werd ontdekt door Erwin Schrödinger. Schrödinger nam het beeld van De Broglie heel serieus: niet alleen licht moest je zien als een golf met een golflengte, óók de elektronen moesten als kleine golfjes worden beschouwd – net als overigens allerlei andere elementaire deeltjes. Schrödinger schreef de precieze wiskundige vergelijking op waaraan zulke golven zich houden, tegenwoordig bekend als de *schrödingervergelijking*. In het bijzonder bepaalt Schrödingers formule wat in elke gegeven situatie de lengte van de golven is. Daarmee kon hij allerlei eigenschappen zoals de energie van de golf uitrekenen, en die eigenschappen kwamen perfect overeen met wat in de laboratoria werd gemeten.

Gek was het wel. Als je alles met golven kon beschrijven, waar waren dan opeens de quanta – de deeltjes, dus – gebleven? Het antwoord op deze vraag werd het duidelijkst geformuleerd door Max Born: de golven moest je zien als een soort *kansverdeling.* Had een golf ergens een heel hoge piek, dan was de kans groot om daar een deeltje aan te treffen. Was ergens anders juist nauwelijks sprake van een golf, dan was de kans op het vinden van een deeltje daar heel klein. Dat gold zowel voor lichtgolven – waarbij het deeltje dus een lichtquantum, een foton was – als voor elektronengolven – waarbij het deeltje het oude vertrouwde elektron was, maar met een gequantiseerde energie.

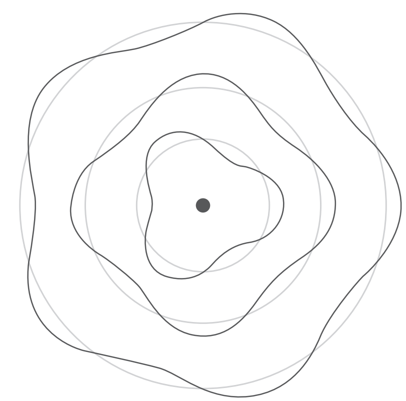
Het verhaal klinkt te fantastisch om waar te zijn, maar het bleek allerlei waarnemingen perfect te verklaren. Allereerst was nu duidelijk wat de quanta van Planck en Einstein waren. In zekere zin waren dat gewoon deeltjes, maar doordat de bijbehorende kansgolven volgens Schrödingers vergelijking een vaste golflengte hadden, bleken die deeltjes een vaste energie te moeten hebben. Je kon in een bepaald experiment prima twee, drie of tien miljard van zulke deeltjes tegenkomen, maar dan werd de totale energie ook twee, drie of tien miljard keer zo groot – altijd een geheel veelvoud.

En hoe zat het dan met de kwadraten van Rydberg? Al een decennium voordat Schrödinger de precieze quantumwetten voor kansgolven in hun uiteindelijke vorm opschreef, besefte Niels Bohr dat ook die kwadraten met behulp van golfeigenschappen begrepen konden worden. Bohr redeneerde als volgt: als we het elektron in het waterstofatoom moeten zien als een golf, dan moet die golf ook precies 'passen' in de baan die het elektron aflegt. Vergelijk het met het aanslaan van een gitaarsnaar. De snaar gaat dan golven, maar de uiteinden blijven vastzitten, en dus past de golflengte waarmee de snaar trilt precies een geheel aantal malen op de gitaar. Let wel: een golflengte wordt meestal gedefinieerd als de afstand waarin een opeenvolgende piek én een dal voorkomen. Een gitaarsnaar hoeft natuurlijk tussen de uiteinden alleen een piek óf een dal te hebben, en dus is het bij zo'n snaar eigenlijk de *halve* golflengte die een geheel aantal malen op de gitaar moet passen!



Drie trillende snaren die, net als een gitaarsnaar, aan de eindpunten worden vastgehouden. De snaren bevatten respectievelijk één, twee en drie halve golflengtes – steeds een geheel aantal.

Een elektrongolf in een baan om een waterstofkern heeft natuurlijk geen uiteinden die ergens aan vast moeten zitten, maar de golf zit wel 'aan zichzelf vast'. Als je in gedachten een rondje langs de baan gaat, kom je weer op precies hetzelfde punt uit, en moet de golf er dus weer hetzelfde uitzien – een piek als je bij een piek begon, een dal als je bij een dal begon. Ook hier was dus sprake van quantisatie: je kon drie golflengtes in een baan kwijt, of vier, of zesentwintig, maar altijd precies een geheel aantal.



De kern van een waterstofatoom met drie mogelijke 'elektrongolven' eromheen: in het grijs de banen waarop precies drie, vier en vijf golven passen.